



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 12-a
București, 13 februarie 2026
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.

Problema 1 (autor Ștefania Constantinescu)

Se consideră un grup $(G, \cdot)$ și $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow G$ morfisme de la grupul $(\mathbb{Z}, +)$ în grupul $(G, \cdot)$, cu proprietatea că există două numere întregi a și b , prime între ele, astfel încât $f(a) = g(a)$ și $f(b) = g(b)$. Arătați că $f = g$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$f(kt) = f(t)^k$ și $g(kt) = g(t)^k$, pentru orice numere întregi k și t .	10p
Există numerele întregi p și q cu $pa + qb = 1$, deci $kpa + kqb = k$, pentru orice număr întreg k .	2,5p
$f(k) = f(kpa + kqb) = f(kpa) \cdot f(kqb) = f(a)^{kp} \cdot f(b)^{kq} = g(a)^{kp} \cdot g(b)^{kq} = g(kpa) \cdot g(kqb) = g(kpa + kqb) = g(k)$, pentru orice întreg k , deci $f = g$.	10p

Problema 2 (autor Florin Rotaru, G.M. 6-7-8/2025)

a) Fie $0 \leq a < b$ și o funcție derivabilă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cu $\int_a^b f(x) dx = bf(a) - af(b)$.

Arătați că există $c \in (a, b)$ cu $f'(c) = 0$.

b) Dați un exemplu de funcție derivabilă $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cu $\int_{-1}^1 f(x) dx = f(-1) + f(1)$

și $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [-1, 1]$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Considerăm funcția $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (a + b - x)f(x) + \int_a^x f(t) dt$. Cum $g(b) = af(b) + \int_a^b f(t) dt = af(b) + bf(a) - af(b) = bf(a) = g(a)$ și g este derivabilă, din teorema lui Rolle rezultă că există $c \in (a, b)$ cu $g'(c) = 0$.	11p

Cum $g'(x) = (a+b-x)f'(x)$, atunci $(a+b-c)f'(c) = 0$. Dar $c < b \leq a+b$, deci $f'(c) = 0$.	1,5p
b) Fie $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Avem $\int_{-1}^1 x dx = 0 = f(-1) + f(1)$ și $f'(x) = 1 \neq 0$ pentru orice $x \in [-1,1]$.	10p

Problema 3 (autor Marian Andronache)

Fie $(M, \cdot)$ un monoid finit cu cel puțin două elemente. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^n \neq a$, oricare ar fi $a \in M$, $a \neq e$, unde e este elementul neutru al monoidului.
b) $(M, \cdot)$ este grup.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $k \geq 2$ numărul elementelor lui M . $b) \Rightarrow a)$ Cum $(M, \cdot)$ este grup, rezultă că $a^k = e$, oricare ar fi $a \in M$, deci $a^k \neq a$, oricare ar fi $a \in M$, $a \neq e$.	10p
$a) \Rightarrow b)$ Fie $a \in M$. Cum două din elementele $a, a^2, a^3, \dots, a^k, a^{k+1}$ sunt egale, există $p, q \in \mathbb{N}^*$ cu $a^p = a^{p+q}$, și, inductiv, prin înmulțire cu a^q , rezultă că $a^p = a^{p+rq}$, oricare ar fi $r \in \mathbb{N}$. Alegem r astfel încât $rq > p$. Prin înmulțirea ultimei egalități cu a^{rq-p} obținem $a^{rq} = a^{2rq}$.	10p
Fie $b = a^{rq}$. Cum $b^2 = b$, rezultă $b^n = b$, deci $b = e$. Din $a^{rq} = e$ deducem că a este simetrizabil, deci $(M, \cdot)$ este grup.	2,5p

Problema 4 (autor Marian Andronache)

Fie $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset [1, \infty)$ și șirul $(a_n)_{n \geq 2}$,

cu $a_n = \frac{1}{\ln n} \int_1^n \frac{f(x)}{x} dx$. Știind că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din lema lui Stolz-Cesaro, este suficient să calculăm $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n} \int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x} dx$	3p

Fie $\varepsilon > 0$ și $\delta_\varepsilon > 1$ astfel încât $1 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, pentru orice $x \in (\delta_\varepsilon, \infty)$. Fie $n > \delta_\varepsilon$. Cum $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{1}{x} < \frac{f(x)}{x} < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{1}{x}$ pentru orice $x \in [n, n+1]$, prin integrare de la n la $n+1$ obținem $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln n) \leq \int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x} dx \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln n)$	15p
Cum $1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n} \int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x} dx \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon$, pentru orice $n \geq [\delta_\varepsilon] + 1$, rezultă că $L = 1$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.	4,5p