

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 11-a
București, 13 februarie 2026
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.

Problema 1 (autor ***)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = 3I_3 - A$ și $M_x = \frac{x}{3}B + \frac{1}{3x^2}A$, unde x este

un număr real nenul.

a) Arătați că $B^2 = 3B$.

b) Arătați că $M_x \cdot M_y = M_{xy}$, pentru orice numere reale nenule x, y .

c) Arătați că $\det(M_x) \neq 0$, pentru orice număr real nenul x .

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Avem $A^2 = 3A$, deci $B^2 = 9I_3 - 3A = 3B$,	6
b) Observăm că $AB = BA = O_3$. Rezultă astfel că $M_x M_y = \frac{xy}{9} B^2 + \frac{1}{9x^2 y^2} A^2 = \frac{xy}{3} B + \frac{1}{3(xy)^2} A = M_{xy}$	10,5
c) Observăm că $M_x \cdot M_{\frac{1}{x}} = M_1 = I_3$, deci M_x este inversabilă, oricare ar fi $x \neq 0$, ceea ce arată că $\det(M_x) \neq 0$, oricare ar fi $x \neq 0$. <i>Soluție alternativă.</i> Avem $M_x = \begin{pmatrix} x+k & k & k \\ k & x+k & k \\ k & k & x+k \end{pmatrix}$, unde $k = \frac{1}{3x^2} - \frac{x}{3}$. Atunci $\det(M_x) = (x+k)^3 + 2k^3 - 3k^2(x+k) = x^3 + 3x^2k = x^3 + x^2\left(\frac{1}{x^2} - x\right) = 1, \text{ pentru } \text{orice } x \neq 0$	6

Problema 2 (autor ***, S.G.M 11/2025)

Arătați că relația de recurență $a_0 \in [0,1]$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n - a_n^2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definește un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și studiați limita acestuia.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Pentru ca șirul să fie corect definit trebuie să verificăm că $a_n - a_n^2 \geq 0$, adică $a_n \in [0,1]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce iese imediat cu un raționament inductiv	5

Dacă $a_0 = 0$ atunci $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, iar dacă $a_0 = 1$ atunci $a_1 = a_2 = \dots = 0$, deci $a_n \rightarrow 0$ în aceste cazuri	4
Dacă $0 < a_0 < 1$, atunci $0 < a_1 \leq \frac{1}{2}$ și, inductiv, $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ pentru orice $n \geq 1$	5
În acest ultim caz $a_{n+1} = \sqrt{a_n - a_n^2} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n$, deci șirul este crescător	5
Rezultă $a_n \rightarrow \ell > 0$, $\ell = \sqrt{1 - \ell^2}$, $\ell = \frac{1}{2}$.	3,5

Problema 3 (autor ***)

Fie n un număr natural nenul și A o matrice $n \times n$ inversabilă, cu elemente numere reale și care verifică relația $A + A^{-1} = I_n$.

- Demonstrați că $A^3 = -I_n$.
- Arătați că n este un număr par.
- Determinați $\det(A + I_n)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Din ipoteză obținem $A^2 - A + I_n = O_n$, de unde $A^3 = -I_n$	6
b) Avem $4A^2 - 4A + I_n = -3I_n$, apoi $(\det(2A - I_n))^2 = (-3)^n$, deci n este par	6
c) Din punctul precedent $(\det A)^3 = (-1)^n = 1$ și, deoarece $\det A$ este număr real, reiese $\det A = 1$	3
Din ipoteză $(A + I_n)^2 = 3A$, deci $(\det(A + I_n))^2 = 3^n \det A = 3^n$	4
Cum $\det(A + I_n) = \det(A^2 + 2I_n) = \det(A + i\sqrt{2}I_n) \det(A - i\sqrt{2}I_n) \geq 0$ ca produs de două numere complexe conjugate, reiese $\det(A + I_n) = 3^{n/2}$	3,5

Problema 4 (autor ***)

a) Arătați că, dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este periodică și limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ există, atunci această limită este nulă.

b) Dați exemplu de funcție periodică $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x}$ nu există. Justificați răspunsul!

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Fie $T > 0$ o perioadă a funcției și ℓ valoarea limitei din enunț. Considerăm șirul $x_n = nT, n \in \mathbb{N}^*$; avem $x_n \rightarrow \infty$. Atunci: pe de o parte $\frac{f(x_n)}{x_n} \rightarrow \ell$, iar pe de altă parte $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ este constant (egal cu $f(0)$), deci $\frac{f(x_n)}{x_n} \rightarrow 0$, de unde	10

$\ell = 0$.	
b) Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1 - \{x\}}$; ea are perioada 1.	2,5
Pentru șirul $x_n = n, n \in \mathbb{N}^*$ avem $\frac{f(x_n)}{x_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$; pentru șirul $y_n = n - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ avem $\frac{f(y_n)}{y_n} = \frac{n}{n - \frac{1}{n}} \rightarrow 1$, deci limita nu există.	10