

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC
CLASA a 10-a
București, 13 februarie 2026
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.

Problema 1 (autor Mihaela Berindeanu, G.M. 6-7-8/2025)

Determinați funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ cu proprietatea că $f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$,
pentru orice $x, y \in (0, \infty)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Pentru $x = y = 1$ obținem $f(1)^2 - f(1) = 2$ și cum $f(1) > 0$, rezultă $f(1) = 2$.	10p
Pentru $x \in (0, \infty)$ și $y = 1$ avem $2f(x) - f(x) = x + \frac{1}{x}$, deci $f(x) = x + \frac{1}{x}$, funcție care verifică proprietatea din enunț.	12,5p

Problema 2 (autor Flavian Georgescu)

Determinați perechile (x, y) de numere reale cu $x, y \in [20, 26]$ astfel încât
 $\max \left\{ (46x - 520)^{\log_y 45}, (46y - 520)^{\log_x 45} \right\} \leq 2025$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
(x, y) soluție $\Rightarrow (y, x)$ soluție, deci putem presupune $x \leq y$. $(y - 20)(y - 26) \leq 0 \Rightarrow y^2 \leq 46y - 520 \Rightarrow y^{2\log_x 45} \leq (46y - 520)^{\log_x 45} \leq 2025$ (*)	8p
Obținem $45^{2\log_x y} \leq 45^2$, deci $\log_x y \leq 1$, de unde $y \leq x$, în consecință, $x = y$.	6,5p
Cum inegalitățile din (*) devin egalități, obținem $(46x - 520)^{\log_x 45} = 2025$ Avem: $(46x - 520)^{\log_x 45} = 2025 \Leftrightarrow 45^{\log_x (46x - 520)} = 45^2 \Leftrightarrow \log_x (46x - 520) = 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 = 46x - 520 \Leftrightarrow x \in \{20, 26\}$. Obținem perechile $(20, 20)$ și $(26, 26)$, care verifică.	8p

Problema 3 (autor Alina Paraschiv)

Fie $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere complexe nenule și $a \geq 2$ un număr real cu proprietatea că $\log_a(|z_n|)$ este număr natural, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Fie P mulțimea submulțimilor finite și nevide ale lui $\mathbb{N}$ și funcțiile $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g: P \rightarrow \mathbb{C}$ cu $f(n) = \log_a(|z_n|)$ și $g(X) = \sum_{i \in X} z_i$.

Arătați că, dacă f e injectivă, atunci g e injectivă.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $X, Y \in P$ cu $g(X) = g(Y)$. Presupunem $X \neq Y$, deci $X \Delta Y \neq \emptyset$, unde $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Fie $k = f(j) = \max\{f(i), i \in X \Delta Y\}$. Din injectivitatea lui f, j e unic și presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $j \in X$. După eventuala reducere a termenilor cu indicii în $X \cap Y$, egalitatea $g(X) = g(Y)$ devine $z_j = \sum_{i \in Y \setminus X} z_i - \sum_{i \in (X \setminus Y) \setminus \{j\}} z_i$ (*) ($\sum_{i \in T} z_i = 0$, dacă $T = \emptyset$)	7p
Dacă $(X \Delta Y) \setminus \{j\} = \emptyset$, atunci $z_j = 0$, fals. Dacă $(X \Delta Y) \setminus \{j\} \neq \emptyset$, atunci $k \geq 1$, și din (*) obținem $z_j \leq \left \sum_{i \in Y \setminus X} z_i \right + \left \sum_{i \in (X \setminus Y) \setminus \{j\}} z_i \right \leq \sum_{i \in (X \Delta Y) \setminus \{j\}} z_i$	7p
Din injectivitatea lui f și $a \geq 2$ rezultă $a^k \leq 1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1} = \frac{a^k - 1}{a - 1} \leq a^k - 1$, fals, deci $X = Y$ și g e injectivă.	8,5p

Problema 4 (autor Flavian Georgescu)

Determinați numerele complexe a, b, c, d care au, simultan, proprietățile:

$$|a| = |b| = |c| = |d| = 1, \quad a + b + c + d = 2\sqrt{3} \quad \text{și} \quad a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Cum cele patru numere au toate modulul egal cu 1 și $a^3 + b^3 = (-c)^3 + (-d)^3$, rezultă ca $a^3, b^3, (-c)^3$ și $(-d)^3$ sunt afixele vârfurilor unui dreptunghi (eventual degenerat) înscris în cercul unitate.	5p
După o eventuală redenumire, rezultă $a^3 = -b^3$ și $c^3 = -d^3$. Dacă $a = -b$ obținem $2\sqrt{3} = c + d \leq c + d = 2$, fals, deci $a \neq -b$ și, analog, $c \neq -d$.	5p

După o eventuală redenumire, rezultă $a = b\varepsilon$ și $c = d\varepsilon$, unde $\varepsilon = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Atunci $2\sqrt{3} = b\varepsilon + b + d\varepsilon + d = (1+\varepsilon)(b+d)$, deci $b+d = \sqrt{3}-i$	6p
Cum $ b+d = \sqrt{3}-i = 2 = b + d $ și $ b = d =1$, obținem $b = d = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$, în consecință, $a = c = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.	6p
Deci două dintre numere sunt egale cu $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ și două sunt egale cu $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$.	0,5p