



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ, 13.02.2026
CLASA a VIII-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 22,5 puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 (autor Bănescu Magdalena)

a) Arătați că pentru orice numere reale strict pozitive și orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc

inegalitatea:
$$\frac{1+a^{4n+2}}{b} + \frac{1+b^{4n+2}}{a} \geq 4(ab)^n.$$

b) Aflați numerele reale, strict pozitive, a și b pentru care are loc egalitatea:

$$\frac{1+a^{2026}}{b} + \frac{1+b^{2026}}{a} = 4(ab)^{506}.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
$\frac{1+a^{4n+2}}{b} + \frac{1+b^{4n+2}}{a} = \left(\frac{1}{b} + \frac{b^{4n+2}}{a}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{a^{4n+2}}{b}\right)$	5p
Aplicăm inegalitatea mediilor pentru fiecare paranteză și obținem: $\left(\frac{1}{b} + \frac{b^{4n+2}}{a}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{a^{4n+2}}{b}\right) \geq 2\left(\sqrt{\frac{b^{4n+1}}{a}} + \sqrt{\frac{a^{4n+1}}{b}}\right)$	5p
$\sqrt{\frac{b^{4n+1}}{a}} \cdot \sqrt{\frac{a^{4n+1}}{b}} = \sqrt{a^{4n} \cdot b^{4n}} = a^{2n} \cdot b^{2n}$	4p
Finalizare $\frac{1+a^{4n+2}}{b} + \frac{1+b^{4n+2}}{a} \geq 4(ab)^n.$	3p
Folosim a) pentru $n = 506$ și obținem egalitatea: $\begin{cases} b^{2027} = a \\ a^{2027} = b \end{cases} \Rightarrow b^{2027^2} = b$ Justificare $b = 1 \Rightarrow a = 1.$	4p 1,5p

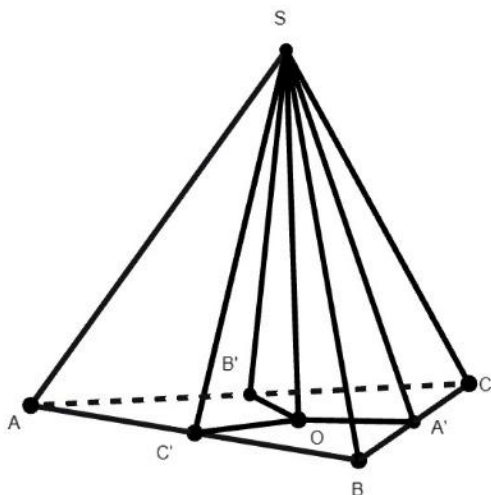
Problema 2 (autor Liliana Niculescu, G.M. 9/2025, supliment)
Aflați perechile de numere întregi pentru care este verificată relația $x(x+1) = y(y+7)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$x^2 + x = y^2 + 7y \mid \cdot 4$ $4x^2 + 4x = 4y^2 + 28y$	2p
$4x^2 + 4x + 1 = 4y^2 + 28y + 49 - 48$ $(2x+1)^2 = (2y+7)^2 - 48$ $(2y+7)^2 - (2x+1)^2 = 48$	2p
$(2y+7-2x-1)(2y+7+2x+1) = 48$ $(2y-2x+6)(2y+2x+8) = 48$ $4(y-x+3)(y+x+4) = 12$	5p
$y-x+3, y+x+4$ au parități diferite. $\begin{cases} y-x+3=a \\ y+x+4=b \end{cases} \quad a \cdot b = 12, a, b \text{ de parități diferite.}$ $2y+7 = a+b \Rightarrow y = \frac{a+b-7}{2}, x = \frac{b-a-1}{2}$	4,5p
$(a, b) \in \{(-12, -1), (-1, -12), (-4, -3), (-3, -4), (12, 1), (1, 12), (4, 3), (3, 4)\}$	2p
$(x, y) = \{(5, -10), (-6, -10), (0, -7), (-1, -7), (-6, 3), (5, 3), (-1, 0), (0, 0)\}$	7p

Problema 3 (autor Livia Harabagiu)

În piramida triunghiulară $SABC$, fie A', B', C' proiecțiile vârfului piramidei pe laturile BC, AC , respectiv AB ale triunghiului ABC . Se știe că $SA' \equiv SB' \equiv SC'$.

- Arătați că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.
- Fie O piciorul perpendicularei duse din S pe planul (ABC) , O în interiorul triunghiului ABC . Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , arătați că piramida $SABC$ este regulată.



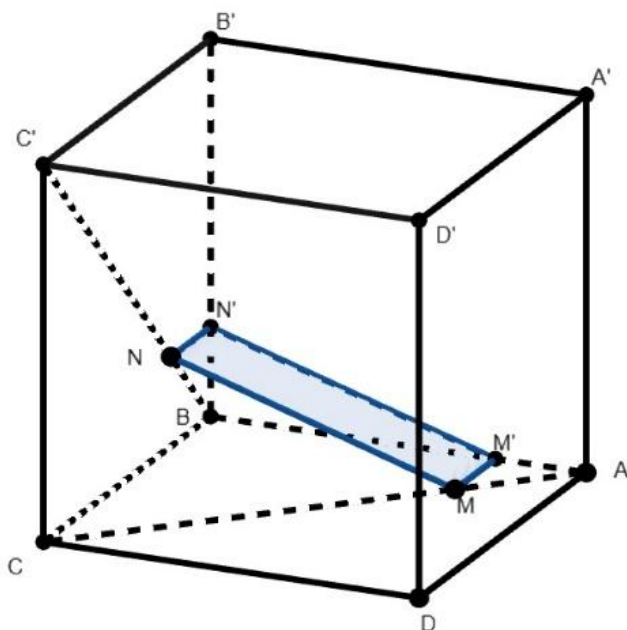
Detalii rezolvare	Barem asociat
$\left. \begin{array}{l} SI \perp (ABC), I \in (ABC) \\ \text{a) Fie } SA' \perp BC \\ IA', BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \xRightarrow{R.T.3\perp} IA' \perp BC.$ Analogue, $IB' \perp AC, IC' \perp AB$ (1) $\left. \begin{array}{l} SI \perp (ABC) \\ IA', IB', IC' \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow SI \perp IA', SI \perp IB', SI \perp IC'$	3p
Comparăm $\triangle SIA'$ cu $\triangle SIB'$ și cu $\triangle SIC'$ și conform cazului I.C. $\Rightarrow \triangle SIA' \cong \triangle SIB' \cong \triangle SIC' \Rightarrow IA' \cong IB' \cong IC' \text{ (2)}$	3p
Din (1) și (2) $\Rightarrow d(I; AB) = d(I; BC) = d(I; AC)$ rezultă I este centrul cercului înscris $\triangle ABC \Rightarrow A'B \cong C'B, A'C \cong B'C, AC' \cong AB'$ $\Rightarrow \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} \stackrel{R.T. Ceva}{=} 1 \Rightarrow AA', BB', CC' \text{ sunt concurente.}$	6p
$\left. \begin{array}{l} \text{Din (a)} \Rightarrow O = I \\ \text{b) } O \text{ centrul cercului înscris în } \triangle ABC \\ O \text{ centrul cercului circumscris } \triangle ABC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \text{ este echilateral. (3)}$	3p
A', B', C' mijloacele laturilor BC, AC, AB.	3p
SC' mediană și înălțime în $\triangle SAB \Rightarrow \triangle SAB$ isoscel cu baza $AB \Rightarrow SA \cong SB$ (4). SA' mediană și înălțime în $\triangle SBC \Rightarrow \triangle SBC$ isoscel cu baza $BC \Rightarrow SB \cong SC$ (5). Din (4) și (5) $\Rightarrow SA \cong SB \cong SC$ (6).	2,5p
Din (3) și (6) $\Rightarrow SABC$ este piramidă triunghiulară regulată.	2p

Problema 4 (autor Traian Preda)

Fie $ABCA'B'C'D'$ un cub și punctele $M \in (AC)$, $N \in (BC')$ astfel încât

$$\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BC'} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

- Demonstrați că $MN \parallel (ABB')$.
- Determinați măsura unghiului dintre dreptele MN și AA' .
- Determinați măsura unghiului dintre dreptele MN și CD' .



Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Alegem $M' \in (AB)$ și $N' \in (BB')$ astfel încât $MM' \parallel BC$ și $NN' \parallel B'C'$.	1p
Din T.F.A. obținem $\frac{MM'}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BC'} = \frac{NN'}{BC'} \Rightarrow MM' \equiv NN'$,	2p
Dar $MM' \parallel NN' \Rightarrow MNN'M'$ paralelogram $\Rightarrow$	2p
$MN \parallel M'N'$, dar $M'N' \subset (ABB') \Rightarrow MN \parallel (ABB')$.	3p
b) Notăm $AB = l \Rightarrow BN' = \frac{(\sqrt{3}-1)l}{2}$	2p
$BN' = AM' \Rightarrow M'B = l - \frac{\sqrt{3}-1}{2}l = \frac{3-\sqrt{3}}{2}l$	2p

$MN \parallel M'N', AA' \parallel BB' \Rightarrow \sphericalangle(MN, AA') = \sphericalangle(M'N', BB') = \sphericalangle BN'M'$	2p
$tg \sphericalangle BN'M' = \frac{M'B}{N'B} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} \Rightarrow$	2p
$\sphericalangle BN'M' = 60^\circ.$	2p
c) $MN \parallel M'N', CD' \parallel BA' \Rightarrow$ $\sphericalangle(MN, CD') = \sphericalangle(M'N', A'B) = \sphericalangle BPN'$ Unde am notat cu P intersecția dreptelor $M'N'$ și $A'B$.	2,5p
Întrucât $\sphericalangle PN'B = 60^\circ, \sphericalangle PBN' = 45^\circ \Rightarrow$ $\sphericalangle BPN' = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ.$	2p