



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa pe școală, București, 13 februarie 2026

CLASA a V-a - Soluții și barem

Problema 1 Vârsta lui Ionel este de $\overline{2a}$ ani și vârsta mamei sale este de $\overline{a2}$ ani. În momentul în care vârsta lui Ionel este de $\overline{2b}$ ani, vârsta mamei sale este egală cu dublul vârstei acestuia. Aflați câți ani are Ionel.

Marius Burtea, G.M. 9/2025

Soluție: Diferența de vârstă dintre Ionel și mama sa este egală cu $\overline{a2} - \overline{2a} = (a \cdot 10 + 2) - (20 + a) = 9 \cdot a - 18$ **6p**
Când vârsta mamei este egală cu dublul vârstei fiului, diferența de vârstă va fi egală cu vârsta lui Ionel **4, 5p**
Obținem $9 \cdot a - 18 = 20 + b$, deci $(20 + b)$ se împarte exact la 9 **6p**
Rezultă $b = 7$ și $a = 5$, așadar Ionel are 25 de ani **6p**

Observație 1. Pentru găsirea răspunsului corect și verificarea faptului că acesta respectă condițiile problemei se acordă ultimele șase puncte din barem.

Observație 2. Aflarea valorilor corecte pentru b și a prin analiza **tuturor** cazurilor posibile este acceptată și se va puncta corespunzător.

Problema 2 Fie numărul $N = 7^{2026} + 21^{472} \cdot 147^{777} : 27^{416}$.

- Arătați că N este pătrat perfect.
- Arătați că N se poate scrie atât ca sumă de 2 cuburi perfecte, cât și ca sumă de 3 pătrate perfecte.

Bogdan Georgescu

Soluție:

- $21^{472} \cdot 147^{777} : 27^{416} = 3^{472} \cdot 7^{472} \cdot 7^{2 \cdot 777} \cdot 3^{777} : 3^{3 \cdot 416} = 7^{2026} \cdot 3$ **4, 5p**
Deci $N = 7^{2026} \cdot 4 = (7^{1013} \cdot 2)^2$ **6p**
- $N = 7^{2025} \cdot 28 = (7^{675})^3 \cdot (27 + 1) = (7^{675} \cdot 3)^3 + (7^{675})^3$ **6p**
Pe de altă parte, $N = (7^{1013} \cdot 2)^2 + 0^2 + 0^2$ **6p**

Observație: Se va puncta corespunzător orice altă scriere a numărului N ca sumă de 2 cuburi perfecte sau de 3 pătrate perfecte (de exemplu $N = (7^{1012} \cdot 12)^2 + (7^{1012} \cdot 4)^2 + (7^{1012} \cdot 6)^2$).

Problema 3 Se consideră o tablă cu 2 linii și 1013 coloane.

- Arătați că putem pune numerele $1, 2, \dots, 2026$ în cele 2026 pătrățele ale tablei astfel încât sumele numerelor de pe fiecare coloană să fie egale.
- Putem pune cele 2026 numere în cele 2026 pătrățele astfel încât sumele numerelor aflate pe fiecare linie să fie egale?

Traian Preda

Soluție

- Așezăm numerele de la 1 la 1013, în ordine crescătoare, pe prima linie și numerele de la 1014 la 2026, în ordine descrescătoare, pe cea de-a doua linie. Astfel, suma numerelor pe fiecare coloană va fi egală cu 2027 **10p**
- Presupunem că se poate. Atunci suma numerelor de pe prima linie ar fi egală cu suma numerelor de pe a doua linie, de unde rezultă că suma tuturor celor 2026 numere ar fi egală cu suma celor două sume, deci cu un număr par. Cum $1 + 2 + 3 + \dots + 2026 = \frac{2026 \cdot 2027}{2} = 1013 \cdot 2027$, număr impar, obținem o contradicție!
În consecință, nu există nicio așezare a celor 2026 numere care să respecte condițiile cerute **12, 5p**

Problema 4

- Determinați numerele $\overline{abc}$ astfel încât $\overline{ab}$ și $\overline{ca} - 1$ să fie pătrate perfecte.
- Determinați numerele $\overline{abcd}$ cu proprietatea că $\overline{abcd} = 8 \cdot \overline{ab}^2 + \overline{cd}^2$.

Cristian Olteanu

Soluție:

- Pătrate perfecte de două cifre sunt 16, 25, 36, 49, 64 și 81. Căutăm pătrate perfecte de forma $\overline{c0}, \overline{c1}, \overline{c2}, \overline{c3}, \overline{c5}, \overline{c7}$, de unde obținem $\overline{abc} = 258$ sau 642 **10p**
- $\overline{abcd} = 8 \cdot \overline{ab}^2 + \overline{cd}^2$ se poate rescrie $\overline{ab} \cdot (100 - 8 \cdot \overline{ab}) = \overline{cd} \cdot (\overline{cd} - 1)$ **6p**
De aici obținem $\overline{ab} \leq 12$ și analizăm următoarele cazuri:
I. $\overline{ab} = 10$ care implică $200 = \overline{cd} \cdot (\overline{cd} - 1)$, fără soluție.
II. $\overline{ab} = 11$ care implică $132 = \overline{cd} \cdot (\overline{cd} - 1)$, de unde $\overline{cd} = 12$.
III. $\overline{ab} = 12$ care implică $48 = \overline{cd} \cdot (\overline{cd} - 1)$, fără soluție.
Prin urmare, $\overline{abcd} = 1112$ **6, 5p**

NOTĂ La punctajul obținut se adaugă cele 10 puncte din oficiu.